



Review
on the PhD thesis
«Quantum calculus and its application to fractional differential equations»
by Nariman Tokmagambetov

This PhD thesis is devoted to quantum calculus and related applications in fractional differential equations.

Nowadays there is a considerable interest in these topics. One important reason for this fact is that this theory is not only very important in itself but for various applications both in mathematics, technical and natural sciences, e.g. in computer science, quantum mechanics and quantum physics.

Thus, there has been a significant development in the field of simple differential and partial differential equations, and a large number of papers and several books have been published on this topic in various fields. However, the theory of difference equations with constant and variable coefficients is still in its early development, and many aspects of this theory still need to be investigated. Therefore, the use of quantum calculus, including q -calculus, is relevant in finding solutions to fractional differential equations.

Application of the q -calculus of quantum calculus in differential equations with fractional derivatives, especially by finding their solutions and proving their existence and uniqueness, is the aim of this PhD thesis.

The PhD thesis consists of three Chapters.

In Chapter 1 all the formulas, definitions and lemmas that are necessary to prove the theorems in Chapters 2 and 3 are obtained.

In the first part of the Chapter 2, a nonlinear problem of the Cauchy type with a q -fractional Riemann-Liouville derivative is considered. First, an equivalence theorem is proved, which is of independent interest. Next, a theorem on the existence and uniqueness of a unique global solution of the Cauchy problem in the space $L_{q,\alpha}^1[a,b]$ for $\alpha > 0$ is proved. The q -analogue of the composite fractional operator or Hilfer derivative operator is also defined. Definitions of the fractional Hilfer q -derivative and the generalized fractional q -derivative are given. To prove the main results, two new lemmas of independent interests are proved. Some new equivalence theorems for the q -fractional problem of Cauchy type and the q -integration Volterra equation are proved.

Chapter 3 is devoted to derive both explicit and numerical solutions of some linear-fractional q -difference equations and Cauchy-type problems related to the fractional Riemann-Liouville q -derivative in q -calculus. These new methods,

which are based on Voltaire's q -integral equations, compositional relations, and operational calculations, have been derived in order to obtain specific solutions to linear q -difference equations. Some of the results have been presented that include fractional q -difference equations of order $\alpha > 0$ and given real numbers in the q -calculus, as well as numerical processing of fractional q -difference equations. In addition, some real solutions of linear-fractional q -differential equations with the Caputo q -fraction of order $\alpha > 0$ were created and investigated. In the final Section of the Chapter, concrete solutions are obtained for a new modification of the Schrödinger equation related to the q -Bessel operator. A theorem on the existence of this solution in the q -calculus in a Sobolev type space is proved. Thus, in particular, in each Section there are given examples illustrating the new main results.

I judge that this study is fundamental in many respects and has made a great contribution to the development of q -calculus in fractional differential equations. In particular, some main results of this PhD thesis are already published in the high-ranked journal "Filomat" (Scopus, Web of Science), and the candidate has presented them at some international mathematical conferences and seminars.

Summing up, I consider that concerning the scientific significance and novelty of the obtained results, it is no hesitation that the PhD thesis of **Nariman Tokmagambetov** on the theme "Quantum calculus and its application to fractional differential equations" satisfies all the requirements for a PhD thesis of very good international standard. Hence, I strongly recommend that the candidate will be awarded the title Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty "6D060100-Mathematics".



Lars-Erik Persson

Professor Dr.

Department of Computer Science and Computational Engineering

Faculty of Engineering Science and Technology

direct phone: +47 76966225 Mobile +46 705262559

UiT Campus Narvik

Webpage <http://www.larserikpersson.se/>

/ Логотип / Норвегия Арктика университеті
Компьютерлік ғылым және есептеу техникасы кафедрасы
Инженерлік ғылымдар және технологиялар факультеті
Лодве Лангсгейт 2 Нарвик 8514

Нариман Токмагамбетовтың
«Кванттық есептеу және оны бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулерге
қолдану»
атты PhD диссертациясына
пікір

Диссертациялық жұмыс кванттық есептеу және оның бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулердегі қолданыстарына арналған.

Бүгінде бұл тақырып жоғары қызығушылық тудыруда. Оның негізгі себептерінің бірі – бұл теорияның математикада, жаратылыстану ғылымдарындағы маңыздылығы, сонымен қатар оны информатика, кванттық механика және кванттық физика сияқты қолданбалы ғылымдардың ғылыми мәселелерінде кеңінен пайдалану.

Осылайша, қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен бөлшек туындылы теңдеулерде айтарлықтай даму болды, әртүрлі салаларда осы тақырыпта үлкен көлемде мақалалар мен бірнеше кітаптар шығарылды. Алайда, тұрақты және ауыспалы коэффициенттері бар q -айырымдық теңдеулер теориясы әлі бастапқы кезеңде тұр, және бұл теорияның көптеген аспектері әлі де зерттеулерді қажет етеді. Демек бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулер шешімдерін табуда кванттық есептеуді, оның ішінде q -есептеуді қолдану өзекті болып табылады.

Бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулерде кванттық есептеудің ішіндегі q -есептеуді қолдану, олардың шешімдерін табу және олардың бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу осы зерттеу жұмысының мақсаты болып табылады.

Диссертация үш тараудан тұрады.

Бірінші тарауда екінші және үшінші тараулардың теоремаларын дәлелдеу үшін қажетті барлық формулалар, анықтамалар және леммалар берілген.

Екінші тараудың бірінші бөлімінде Риман-Лиувилльдің бөлшек q -туындысы бар сызықтық емес Коши типтес есебі қарастырылды. Алдымен эквиваленттік теорема дәлелденді. Әрі қарай, $L_{q,a+}^1[a,b]$ кеңістігінде $\alpha > 0$ үшін Коши типтес есебінің жалғыз жалпыланған шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремасын дәлелдеген. Сонымен қатар құрама бөлшек операторының немесе Хильфер туынды операторының q -аналогы да анықталған. Хильфердің бөлшек q -туындысы мен жалпыланған бөлшек q -туындысының анықтамалары берілген. Негізгі нәтижелерді дәлелдеу үшін екі лемма дәлелденді. Коши типтес есебі мен q -интегралдық Вольтерра теңдеуі үшін эквиваленттік теоремалар дәлелденген.

Үшінші тарауда сызықтық бөлшек q -айырымдық теңдеулерінің анық және сандық шешімдері және q -есептеудегі Риман-Лиувилльдің бөлшек q -туындысына байланысты Коши типтес есептері қарастырылды. Сызықтық q -айырымдық теңдеулеріне нақты шешімдер беру үшін Вольтерраның q -интегралдық теңдеулеріне, композициялық катынастарға және операциялық есептеулерге негізделген тәсілдер ұсынылған. Қарапайымдылық үшін $\alpha > 0$ ретті бөлшек q -айырымдық теңдеулерін және

q-есептеудегі берілген нақты сандарды қамтитын нәтижелер берілген. Онда ретті Капутоның q-бөлшек туындысы бар бөлшек-сызықты дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін құрылған. Үшінш қорытындылайтын бөлімінде q-Бессель операторымен байланысты Шредингер жаңа модификациясының нақты шешімдері алынды. Бұл шешімнің Соболе кеңістігінде q-есептеуде бар екендігі туралы теорема дәлелденді. Сонымен, әр негізгі нәтижелерді көрсететін бірнеше мысалдар келтірілген.

Бұл зерттеу көбіне іргелі болып табылады және бөлшек туындылы теңдеу есептеуін дамытуға үлкен үлес қосты деп есептеймін. Атап айтқанда, бұл диссертация негізгі нәтижелері беделді Filomat журналында (Scopus, Web of Science), сондай-ақ қатар халықаралық математикалық конференциялар мен семинарлардың материалдары жарияланған.

Қорытындылай келе, алынған нәтижелердің ғылыми маңыздылығы мен жаңалығы тұрғысынан алғанда **Нариман Токмагамбетовтың** «Кванттық есептеу және оны бөлшек туындылы дифференциалдық теңдеулерге қолдану» атты PhD диссертациясы жоғары деңгейлі халықаралық стандарттағы PhD диссертацияларға қойылатын талаптарға сай екендігіне еш күмән жоқ деп санаймын. Сондықтан мен үміткерге математика мамандығы бойынша философия докторы атағын беруді ұсынамын.

/ Қолы/

Ларс Эрик Перссон

/ Логотип / Норвегия Арктикалық университеті

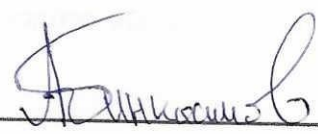
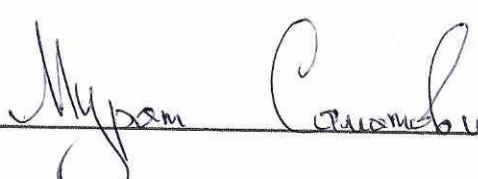

Компьютерлік ғылым және есептеу техникасы кафедрасы

Инженерлік ғылымдар және технологиялар факультеті

Тікелей телефон: +47 76966225 Ұялы: +46 705262559

Нарвик қаласындағы UiT Университетінің корпусы

Сайт: <http://www.larserikpersson.se/>

Институт Арктический университет Норвегии
Института компьютерных наук и вычислительной техники
Института инженерных наук и технологий
Университет Лангсгейт 2
Тромсё 8514

**Рецензия на диссертацию докторанта степени PhD,
Наримана Токмагамбетова
«Квантовое исчисление и его применение к дифференциальным уравнениям с
дробными производными»**

Настоящая диссертация на соискание степени Доктора философии (PhD) посвящена квантовому исчислению и соответствующим приложениям в дробно-дифференциальных уравнениях.

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к данной тематике. Одной из важных причин, обуславливающих подобный интерес является то, что данная теория важна не только сама по себе в отдельности, но также и для различных приложений как в математике, так и в технических и естественных науках, например, в информатике, квантовой механике и квантовой физике.

Таким образом, в области простых дифференциальных уравнениях и уравнениях с частными производными наблюдается значительное развитие, и по данной теме опубликовано большое количество работ и несколько книг в различных областях. Тем не менее, теория дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами все еще находится на начальном этапе своего развития, и многие аспекты этой теории еще требуют изучения. Поэтому использование квантового исчисления, в том числе q -исчисления, актуально при поиске решений дробно-дифференциальных уравнений.

Целью данной докторской диссертации является применение q -исчисления квантового исчисления в дифференциальных уравнениях с дробными производными, в частности, нахождение их решений и доказательство их существования и единственности.

Докторская диссертация состоит из трех глав.

В главе 1 приводятся все формулы, определения и леммы, необходимые для доказательства теорем в главах 2 и 3.

В первой части главы 2 рассматривается нелинейная задача типа Коши с дробной q -производной Римана-Лиувилля. Сначала доказывается теорема эквивалентности, представляющая интерес сама по себе. Далее доказывается теорема о существовании и единственности уникального глобального решения задачи Коши в пространстве $L^1_{q,\alpha}[a,b]$ для $\alpha > 0$. Также определяется q -аналог составного дробного оператора или производного оператора Хильфера. Даны определения дробной q -производной Хильфера и обобщенной дробной q -производной. Для доказательства основных результатов доказываются две новые леммы, представляющие независимый интерес. Доказаны некоторые новые теоремы эквивалентности для q -фракционной задачи типа Коши и q -интегрального уравнения Вольтерра.

Глава 3 посвящена получению явных и численных решений некоторых линейных дробных q -разностных уравнений и задач типа Коши, связанных с дробной q -производной Римана-Лиувилля в q -исчислении. Данные новые методы, основанные на q -интегральных уравнениях Вольтера, композиционных соотношениях и операционном исчислении, были выведены для получения конкретных решений линейных q -разностных уравнений. Были представлены некоторые из этих результатов, которые включают дробные q -дифференциальные уравнения порядка $\alpha > 0$ и заданные вещественные числа в q -исчислении, а также численную обработку дробных q -дифференциальных уравнений. Кроме того, были созданы и исследованы некоторые вещественные решения линейно-дробных q -дифференциальных уравнений с q -фракцией Капуто порядка $\alpha > 0$. В заключительном разделе главы получены конкретные решения для новой модификации уравнения

Шредингера, связанной с оператором q -Бесселя. Доказывается теорема о су-
этого решения в q -исчислении в пространстве соболевского типа. Таким образо-
разделе, в частности, приводятся примеры, иллюстрирующие новые основные рез.

Я считаю, что данное исследование является фундаментальным в
отношениях и внесло большой вклад в развитие q -исчисления в дробно-дифферен-
уравнениях. В частности, некоторые основные результаты данной докторской дисс-
уже опубликованы в высокорейтинговом журнале «Filomat» (Scopus, Web of Science)
кандидат представлял их на некоторых международных математических конферен-
семинарах.

Подводя итог, считаю, что по научной значимости и новизне полученных результ-
без сомнения, докторская диссертация Наримана Токмагамбетова на тему «Квант-
исчисление и его применение к дифференциальным уравнениям с дробными производным
удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторской диссертации весьма
хорошего международного стандарта. Таким образом, я настоятельно рекомендую присвоить
кандидату степень Доктора философии (PhD) по специальности «6D060100-Математика».

/Подпись/

Ларс Эрик Перссон

/Логотип/ **Арктический университет Норвегии**

Кафедра компьютерных наук и вычислительной техники

Факультет инженерных наук и технологий

Прямой телефон: +47 76966225 Мобильный: +46 705262559

Корпус Университета UiT в г. Нарвик

Сайт: <http://www.larserikpersson.se/>



Всего прошито, пронумеровано
и скреплено печатью 5

(2.8.176)

листа(ов).

Подпись

Траммана

М.П.

